

# 灵魂不等式及其应用

■ 安徽省太湖中学 李昭平

## 1. 题目

设函数  $f(x)=e^x-ax-1$ , 其中  $a \in \mathbb{R}$ . 若  $f(x) \geq 0$  在  $(-\infty, +\infty)$  内恒成立, 求  $a$  的值 (2018 课标Ⅲ卷第 21 题压轴题).

## 2. 分析

本题是常见的一次函数与指数函数的复合型函数问题, 利用导数研究其单调性和最值, 再根据  $f(x) \geq 0$  在  $(-\infty, +\infty)$  内恒成立  $\Leftrightarrow f(x)_{\min} \geq 0 (x \in (-\infty, +\infty))$  可以求解. 考虑到  $f(x) \geq 0$  可以转化为  $e^x \geq ax+1$ , 这让我们联想到: 能否利用常见的恒成立不等式  $e^x \geq x+1 (x \in \mathbb{R}, \text{当且仅当 } x=0 \text{ 时等号成立})$  来处理呢? 其实,  $e^x \geq ax+1$  就是  $ax \leq e^x-1$ . 而  $e^x \geq x+1$  可以变式为  $\frac{e^x-1}{x} > 1 (x>0)$  或  $\frac{e^x-1}{x} < 1 (x<0)$  由此得到以下解法.

## 3. 解答

$f(x) \geq 0$  就是  $ax \leq e^x-1$ . 当  $x=0$  时, 等号成立,  $a \in \mathbb{R}$ .

当  $x>0$  时,  $a \leq \frac{e^x-1}{x}$ . 由不等式  $e^x \geq x+1 (x>0)$ , 得  $\frac{e^x-1}{x} >$

1, 因此  $a \leq 1$ .

当  $x<0$  时,  $a \geq \frac{e^x-1}{x}$ . 由指数型核心不等式  $e^x \geq x+1 (x<0)$ , 得  $\frac{e^x-1}{x} < 1$ . 因此  $a \geq 1$ .

综上所述, 实数  $a$  的值是 1.

## 4. 结论

我们常常称恒成立不等式  $e^x \geq x+1 (x \in \mathbb{R}, \text{当且仅当 } x=0 \text{ 时等号成立})$  和恒成立不等式  $\ln x \leq x-1 (x>0, \text{当且仅当 } x=1 \text{ 时等号成立})$  为“灵魂不等式”, 指数型与对数型成对出现. 证明如下:

**法 1 (图像法):** 在同一坐标系下作出函数  $f(x)=e^x$  和  $g(x)=x+1$  的图像, 两图像均经过定点  $(0, 1)$ , 且  $f'(0)=1$ , 即直线  $g(x)=x+1$  是曲线  $f(x)=e^x$  在定点  $(0, 1)$  处的切线, 因此  $e^x \geq x+1 (x \in \mathbb{R}, \text{当且仅当 } x=0 \text{ 时等号成立})$ .

同理知, 直线  $y=x-1$  是曲线  $y=\ln x$  在定点  $(1, 0)$  处的切线, 故  $\ln x \leq x-1 (x>0, \text{当且仅当 } x=1 \text{ 时等号成立})$ .

**法 2 (导数法):** 令  $f(x)=e^x-x-1$ , 则  $f'(x)=e^x-1$ . 显然  $f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  内单减, 在  $(0, +\infty)$  内单增, 因此  $f(x)_{\min}=f(0)$ . 于

是,  $f(x) \geq f(0)=0$ , 即  $e^x \geq x+1 (x \in \mathbb{R})$ , 当且仅当  $x=0$  时等号成立.

同理, 令  $g(x)=\ln x-x+1 (x>0)$ , 得到  $\ln x \leq x-1 (x>0)$ , 当且仅当  $x=1$  时等号成立.

## 5. 应用

纵观近几年数学全国卷与部分省市高考卷我们发现, 随着高考对函数与导数知识考查的深入, 以指数型恒成立不等式  $e^x \geq x+1 (x \in \mathbb{R})$  和对数型恒成立不等式  $\ln x \leq x-1 (x>0)$  为载体的试题逐渐进入高考试卷. 由于这两个恒成立不等式内涵丰富、结构精巧, 易与相关知识交汇与融合, 能有效考查学生的思维水平和综合能力, 因此往往称之为灵魂不等式. 下面结合部分高考题或模考题介绍其应用.

### 5.1 $e^x \geq x+a$ 和 $\ln x \leq x+a$ 型

**例 1.** (2017 济南市模考卷) 已知不等式  $e^x \geq x+2a$  对任意  $x \in \mathbb{R}$  恒成立, 则实数  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $a \leq \frac{e}{2}$     B.  $a \geq \frac{e}{2}$     C.  $a \leq \frac{1}{2}$     D.  $a \geq \frac{1}{2}$

**解析:**  $e^x \geq x+2a$  等价于  $2a \leq e^x-x$ , 即  $2a \leq (e^x-x)_{\min}$ .

由指数型灵魂不等式  $e^x \geq x+1 (x \in \mathbb{R})$ , 知  $e^x-x \geq 1$ , 当  $x=0$  时,  $e^x-x$  取到最小值 1.

因此  $2a \leq 1$ ,  $a \leq \frac{1}{2}$ . 故选 C.

**注意:** 利用指数型灵魂不等式  $e^x \geq x+1 (x \in \mathbb{R})$  的变式  $e^x-x \geq 1 (x \in \mathbb{R})$  解题.

**例 2.** (2017 合肥市模考卷) 若存在  $x_0>0$ , 使不等式  $\ln x_0 \geq x_0+b$  成立, 则实数  $b$  的取值范围是 ( )

- A.  $b \leq -1$     B.  $b \geq -1$     C.  $b \leq -e$     D.  $b \geq -e$

**解析:**  $\ln x_0 \geq x_0+b$  等价于  $b \leq \ln x_0-x_0$ , 即  $b \leq (\ln x-x)_{\max} (x>0)$ .

由对数型灵魂不等式  $\ln x \leq x-1 (x>0)$ , 得  $\ln x-x \leq -1 (x>0)$ , 因此  $(\ln x-x)_{\max}=-1$ .

于是  $b \leq -1$ , 故选 A.

**注意:** 利用对数型灵魂不等式  $\ln x \leq x-1 (x>0)$  的变式  $\ln x-x \leq -1 (x>0)$  解题.

### 5.2 $e^x \geq ax+1$ 和 $\ln x \leq a(x-1)$ 型